Examen - Convocatoria Ordinaria

[3 horas]

- **No está permitido utilizar (ni acceder a) ningún tipo de documentaciún.**

1. Dada la cadena de Markov con estados $\{1, 2, 3, 4\}$ y matriz de transición

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$$

y asumiendo que la distribución inicial es

$$\pi(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.8 \end{pmatrix} .$$

a) Dibujar el diagrama de transición, caracterizar los estados y sus periodos.

b) Calcular la distribución de $X(2)$ y su momento de orden 2.

c) Calcular la distribución de $X(\infty)$, su valor medio y su varianza.

(2.5 Puntos)

2. Se considere el juego de un jugador que en cada jugada tiene probabilidad 25.00 % de ganar y 75.00 % de perder 3 monedas. Llamando S_n el número de monedas que el jugador tiene en el tiempo $n \geq 1$, se tiene que $S_n = 12 + \sum_{1 \leq k \leq n} X_k$, con X_k la cuantía ganada o, bien, perdida en la jugada $k > 0$. El juego se acaba cuando el jugador se queda sin monedas o cuando llegue a tener 30 monedas:

a) Calcula el valor de $\mathbb{E}[(\sqrt[3]{3})^X]$, donde X es una cuantía ganada en una jugada cualquiera.

b) Muestra que el proceso $W_n = (\sqrt[3]{3})^{S_n}$ es una martingala.

c) Define el tiempo de parada T que indica el momento en el que se acaba el juego, y calcula la probabilidad de ganar.

d) Calcula la función de probabilidad de S_T y su varianza.

(2.5 Puntos)

3. Una empresa tiene una maquinaria para producir sus productos y modela su estado como una cadena de Markov. Los estados son "S" (en Servicio), "R" (en Reparación), "D" (Desuso). Cuando está en Servicio el tiempo medio para averiarse es de 3 años, mientras el tiempo de vida es de 30 años (se entiende en este caso que pase directamente a un estado de Desuso sin pasar por la fase de Reparación).Servicio . Cuando está en Reparación, normalmente se estima un tiempo medio de reparación de 4 días . La reparación normalmente acaba el 99 % con la puesta en marcha de la maquinaria y para el restante 1 % la maquinaria no se puede reparar y acaba en Desuso. Se supone que la maquinaria empiece en estado de Servicio y que en promedio produzca un ingreso de 1000€ al día cuando en Servicio, y que cueste 200€ al día en estado de Reparación.

a) Calcula el generador de la cadena, la matriz de transición de la cadena incrustada, el diagrama de transición y caracteriza los estados.

b) Calcular los tiempos medios que la cadena pasa en los estados de reparación y de servicio antes de quedarse en desuso.

c) Calcular el tiempo medio de vida de la maquinaria. Es de 30 años? Razona tu respuesta.

d) Calcular el beneficio medio que conlleva el funcionamiento de esta maquinaria a lo largo de su vida (Beneficios = Ingresos - Costes).

En los cálculos considera un año como hecho de 260 días laborables. En los cáclulos usa como mínimo 5 dígitos decimales.

(2.5 Puntos)

4. Considera una empresa cuyo superávit se mueve como un movimiento Browniano sin deriva y volatilidad 3 y que la empresa empiece con un capital inicial igual a 4. Es decir, llamando $X(t)$ al proceso que modela el superavit de la empresa, tenemos que

$$X(t) = 4 + 3\,B(t)$$

donde $B(t)$ es el processo Browniano estándar.

a) Muestra que $X(t)$ es una martingala

b) Calcula, razonando tu respuesta, la probabilidad que $X(t)$ valga 8.5 antes de tocar el valor 2

c) Indicando $T_{8.5} = \text{ínf}\{t : X(t) = 8.5\}$. Calcula la $\mathbb{P}\{T_{8.5} \leq 9\}$

Vas a necesitar la tabla de la Normal estandard. Sea $Z \sim N(0, 1)$, *con* $\Phi(z) = \mathbb{P}(Z \leq z)$ *tenemos*

z	0	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45
$\Phi(z)$	0.5	0.519939	0.539828	0.559618	0.57926	0.598706	0.617911	0.636831	0.655422	0.673645
z	0.5	0.55	0.6	0.65	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95
$\Phi(z)$	0.691462	0.70884	0.725747	0.742154	0.758036	0.773373	0.788145	0.802337	0.81594	0.828944

(2.5 Puntos)